



INTERAÇÕES ENTRE A MATEMÁTICA E AS CIÊNCIAS NATURAIS: MOTIVOS PARA DESCONFIANÇA?

INTERACTIONS BETWEEN MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES: REASONS FOR SUSPICION?

INTERACCIONES ENTRE LAS MATEMÁTICAS Y LAS CIENCIAS NATURALES: ¿MOTIVOS PARA DESCONFIANZA?

Fabrizio Pinto Monteiro*

RESUMO

Este artigo busca realizar uma reflexão epistemológica sobre algumas possibilidades de interação entre a Matemática e as Ciências Naturais. Sua principal preocupação envolve os questionamentos existentes em nossa atualidade por parte de alguns grupos sociais, como os chamados “terraplanistas”, em sentido amplo, da validade ou pertinência desta interação. Não se tratando de um trabalho de cunho apenas teórico-conceitual, o artigo foi construído na forma de uma análise do exercício prático do ofício do cientista natural com uma disciplina, objeto, problematização e metodologia concretos, destacando nesta o papel construído por ele para a Matemática. A disciplina específica selecionada é a Geomorfologia Planetária, discutindo o papel da gravitação na formação geral do relevo da superfície da crosta gelada do satélite joviano Europa.

Palavras-chave: Epistemologia da Ciência. Geomorfologia Planetária. Matemática.

ABSTRACT

This article seeks to conduct an epistemological reflection on some possibilities of interaction between Mathematics and the Natural Sciences. Its main concern involves the current questioning by some social groups, such as the so-called ‘flat-earthers’, in a broad sense, about the validity or relevance of this interaction. Not being a purely theoretical-conceptual work, the article was constructed in the form of an analysis of the practical exercise of the natural scientist’s craft with a concrete discipline, object, problematization, and methodology, highlighting the role constructed by him for Mathematics. The specific discipline selected is Planetary Geomorphology, discussing the role of gravitation in the general formation of the relief of the icy crust surface of the Jovian satellite Europa.

Keywords: Science Epistemology. Planetary Geomorphology. Mathematics.

*Graduado, Mestre e Doutor em História (Universidade Federal de Uberlândia). Graduado em Física (Universidade de Franca) e em Ciências da Natureza (Centro Universitário Estácio). Professor da Educação Básica na rede municipal de ensino de Uberlândia/MG. E-mail: caminhomarcial@gmail.com. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-3968-0854>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6675751068188659>.

RESUMEN

Este artículo busca realizar una reflexión epistemológica sobre algunas posibilidades de interacción entre las Matemáticas y las Ciencias Naturales. Su principal preocupación se centra en los cuestionamientos actuales que existen por parte de algunos grupos sociales, como los llamados 'terraplanistas', en un sentido amplio, sobre la validez o pertinencia de esta interacción. No se trata de un trabajo meramente teórico-conceptual; el artículo ha sido construido en forma de un análisis del ejercicio práctico del oficio del científico natural, con una disciplina, objeto, problematización y metodología concretos, destacando en ello el papel que él ha construido para las Matemáticas. La disciplina específica seleccionada es la Geomorfología Planetaria, discutiendo el papel de la gravitación en la formación general del relieve de la superficie de la corteza helada del satélite joviano Europa.

Palabras clave: Epistemología de la Ciencia. Geomorfología Planetaria. Matemáticas.

1 INTRODUÇÃO

É bem conhecido dos historiadores o longo processo de “matematização” das Ciências Naturais na Europa a partir dos séculos XVI e XVII, sendo Galileu Galilei (1564 – 1642) um de seus expoentes iniciais e Isaac Newton (1642 – 1727) um de seus maiores fomentadores (Pires, 2011, p. 116-117) (Bassalo *et al.*, 2021, p. 88). Em épocas mais recentes, entretanto, percebemos como alguns “rompantes” anticientíficos – como o quase cíclico movimento terraplanista ou as perigosas campanhas contra a vacinação – têm como um dos alvos principais a participação da Matemática na prática científica¹.

Em artigo sobre o tema, Ciro Ferreira, Lucas Nardi e Cibelle Silva recordam sobre uma sintomática afirmação de um dos “campeões” do terraplanismo nos EUA, Mark Sargent, registrada no documentário *Behind the curve* (2018): “A razão pela qual estamos vencendo a ciência é o fato que a ciência apenas joga matemática em você, enquanto nós podemos dizer: ‘Olhe, ali está Seattle [apontando na direção do horizonte. Você pode vê-la agora com a sua câmera!’” (Ferreira *et al.*, 2023, p. 167). Parte de um fenômeno contemporâneo em certo sentido amorfo, mas de alcance capilarizado, que alguns autores convencionaram denominar “pós-verdade”, o terraplanismo sustenta-se em uma desconfiança generalizada das instituições sociais e na transformação das experiências empíricas pessoais como critério maior de validação do conhecimento (Marineli, 2020, p. 1176-1177). Para Sargent, o fato da estrutura epistemológica das ciências atuais sustentarem-se em boa parte na Matemática – criadora de

¹Para uma discussão mais profunda sobre as manifestações anticientíficas, incluindo aí a eleição da matemática como um de seus alvos, ver a reunião de artigos organizados pelo professor Ivã Gurgel (Gurgel, 2023).

um mundo abstrato e extra-empírico por excelência – é uma justificativa legítima para desconfiar-se (e renegar a validade) das próprias ciências. De fato, a Matemática, dizem críticos, teria dado às descrições e explicações científicas sobre a natureza um caráter elitista face o grande público (Ferreira *et al.*, 2023, p. 170).

Por outro lado, destacam ainda Ferreira *et al.*, (2023, p. 170), aos cientistas da natureza, a Matemática “traz novas possibilidades teóricas ao campo de estudo em questão”. É difícil imaginar-se na contemporaneidade qualquer área das Ciências Naturais que prescindia totalmente os recursos matemáticos – seja a estatística, a geometria ou o cálculo. Mesmo que sabidamente imperfeitos, os modelos teóricos e experimentais criados pelos pesquisadores para representar e compreender os fenômenos da natureza são, em grande parte, baseados nesses recursos (Cipolatti *et al.*, 2016, p.i).

A presente pesquisa visa aprofundar esta reflexão, descrevendo e discutindo alguns exemplos de possíveis interações entre a Matemática e as construções teórico-experimentais das Ciências Naturais. Nosso objetivo mais geral é levar aos colegas, pesquisadores, professores e/ou divulgadores destas ciências, o incentivo a observar melhor o caminho traçado por eles mesmos na construção do conhecimento sobre a natureza. Uma auto-observação que, sem dúvida, pode auxiliar no momento de explicar e divulgar para o público leigo como se dá esta construção – para muitos um processo misterioso e repleto de desconfianças. Detalhemos o trajeto desse nosso debate.

As Ciências Naturais são muitas e diversas em suas estruturas e práticas epistemológicas. Dessa maneira, talvez uma abordagem genérica não seja a mais adequada, sendo necessário restringi-la a uma ciência específica, com questões pontuais caras à sua própria atuação concreta. Assim, será possível discutir como sua interação com a Matemática pode ser elaborada em uma metodologia real, mais próxima do cotidiano do pesquisador.

O campo selecionado entre as Ciências Naturais para este trabalho é a Geomorfologia Planetária, que se mostra favorável, pois, assim como a Geomorfologia Terrestre, ao longo de sua história teve como importante mudança metodológica a passagem de apenas realizar a *descrição* das formas de relevo dos corpos celestes para a tentativa de *compreensão* de seus processos formativos (Greeley, 2013, p. 15). Mais do que isso, pelas imensas dificuldades de análises *in loco* das superfícies de outros planetas e satélites, na Geomorfologia Planetária a fase interpretativa dos dados coletados à distância é fundamental (Greeley, 2013, p. 19). É aí que a Matemática se mostra uma ferramenta central para esta ciência.

O mote condutor escolhido para nosso exercício de autorreflexão epistemológica pode ser apresentado na forma de uma questão: como o fenômeno da gravitação participa das peculiares formações de relevo da crosta de gelo do satélite jupiteriano Europa? Como uma genealogia de si mesmo, este artigo foi elaborado com constantes e explícitos auto-questionamentos sobre sua própria trajetória construtiva, expondo ao leitor as problemáticas e escolhas usadas pelo autor para desenvolver a pesquisa, explicando didaticamente as narrativas matemáticas envolvidas, seu diálogo com os dados empíricos e seus usos epistemológicos para o conhecimento sobre o fenômeno escolhido e apresentado na questão apresentada acima².

Este caminho acabou por dividindo o Desenvolvimento do artigo em quatro seções principais, organizadas de acordo com três interações analisadas entre a Matemática e a Geomorfologia Planetária no papel da gravitação na formação do relevo de Europa.

A Seção 2.1 trata da importância da Matemática no *processo de construção dos conceitos* para as Ciências Naturais. Nela, inicia-se a discussão sobre a Geomorfologia Planetária e o relevo de Europa através do desenvolvimento da compreensão de gravitação newtoniana e sua interação com as leis empíricas de Johannes Kepler (1571 – 1630) sobre o movimento dos astros.

A Seção 2.2 debate sobre como a Matemática pode *revelar processos e eventos da natureza que inicialmente parecem desafiar o senso comum* do observador empírico cotidiano. Para tal, avançamos em nosso estudo da gravitação para o fenômeno das marés gravitacionais nos corpos celestes em interação mútua e sua manifestação como forças diferenciais.

A Seção 2.3 volta-se à Matemática como uma ferramenta cognitiva para auxiliar o pesquisador da natureza a *isolar analiticamente fenômenos possuidores de causas e origens múltiplas e simultâneas*, difíceis de compreender separadamente apenas pela observação empírica do evento. Após a discussão das forças diferenciais gravitacionais na seção anterior, com o exemplo do sistema Terra-Lua, esta dá um passo além ao introduzir o tema da Ressonância de Laplace, essencial para o entendimento das forças gravitacionais presentes entre Júpiter e suas principais luas.

²Este método genealógico, que possui um caráter fenomenológico, é melhor detalhado em Monteiro (2014 e 2022).

Por fim, a Seção 2.4 foi organizada como uma síntese do debate realizado até aquele ponto. Ela apresenta a descrição final sobre algumas formações de relevo da crosta de gelo de Europa, quando a Matemática gradativamente deixa de estar presente no texto de modo explícito, mas torna-se parte estruturante de seu processo explicativo. Seu objetivo é deixar claro ao leitor como aquela construção de conhecimento sobre a natureza, mesmo que ali esteja exposta ao final apenas em palavras, não pôde ser realizada sem a interação com os processos matemáticos.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Construção dos conceitos empírico/matemáticos: a elaboração matemática da “Lei de Gravitação” de Isaac Newton

Diferente do processo de construção axiomática da Matemática pura, nas Ciências Naturais, a elaboração dos conceitos básicos utilizados pelo pesquisador envolve a interação de uma ação mental lógica com fenômenos observados na natureza e reorganizados pelo cientista para a composição de um corpo teórico e explicativo inteligível (Wallace, 2023, p. 32).

Será um processo acessível como demonstração a um interlocutor interessado em compreender esta interação entre dados empíricos e formulações matemáticas? Como caso exemplar, comecemos com a construção do conceito de *gravitação* por Isaac Newton a partir da chamada “Terceira Lei de Kepler”, demonstrada pela primeira vez em *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). Esta construção se deu por um processo iniciado através de um *modelo empírico*, ou seja, sustentado em registros e medições, não em hipóteses *a priori* (Cipolatti *et al.*, 2016, p. 1).

2.1.1 A força centrípeta no movimento orbital

Em 1601, com o falecimento do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (nascido em 1546), Johannes Kepler herdou a posição de matemático imperial no Sacro Império Germânico e também as anotações das observações astronômicas de seu antecessor. Brahe catalogara a localização com ordem de precisão de apenas 4 minutos de arco mais de 700

modifique a direção de sua viagem após um tempo Δt (ou, “variação de tempo”). A Lua chega, então, à posição G após percorrer uma distância $V.\Delta t$. De onde surge essa relação de multiplicação para significar a distância percorrida? Vejamos.

Essa relação é uma possibilidade permitida pela Matemática ao cientista para dinamizar o conceito de *velocidade*. O que chamamos “velocidade”, em uma compreensão simples? É a medida da distância percorrida por algo durante a passagem de certo intervalo de tempo; por isso falamos em “quilômetros em uma hora” (km/h) ou “metros em um segundo” (m/s) (Giacometti, 2015, p. 49-60). O mesmo conceito escrito em linguagem matemática pode ser:

$$V = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Aqui, Δd representa a distância percorrida (“variação da posição”) e Δt , como mencionado, o tempo gasto para essa ação. Mais formalmente, trata-se do entendimento da velocidade média, adequada em nosso caso pelo movimento do satélite não variar em módulo, na direção indicada, em sua órbita.

A notação matemática permite-nos “manusear” mais facilmente esse entendimento: em vez de destacar do lado esquerdo da equação a ideia de *velocidade* “ V ” como está acima, podemos colocar sob destaque a distância percorrida Δd , “passando para o lado esquerdo” da equação o Δt e multiplicando-o por V , assim:

$$V = \frac{\Delta d}{\Delta t} \quad \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \quad \Delta t.V = \Delta d \quad , \text{ o que é o mesmo que, } \Delta d = V.\Delta t$$

Por esse motivo pudemos destacar antes para o movimento da Lua em nosso exemplo: a distância percorrida pela Lua entre os pontos D e G é igual a $V.\Delta t$.

A intensidade da velocidade da Lua não mudou após esse deslocamento, permanecendo igual em D e em G . Estamos chamando essa intensidade de V . Entretanto, como ela mudou um pouco a direção para onde estava indo (não “indo reto” e se perdendo no espaço e sim fazendo uma “curva” ao redor da Terra) chamamos a velocidade da Lua quando está em G de V_2 . Ela não está indo nem mais rápido, nem mais devagar em D ou G , apenas mudou sua direção, por isso dizemos que o *módulo* (o valor numérico) de V_1 e V_2 é o mesmo: V .

Observando novamente a *Figura 1*, chamamos o ângulo formado entre as duas posições da Lua, D e G , e o centro da Terra de Θ . Surge aí um triângulo com dois lados iguais (r e r , o raio da órbita) e um lado diferente $V.\Delta t$; é um *triângulo isósceles*. Ele é um triângulo

semelhante a outro que se forma caso coloquemos na posição G o vetor que indica aquela velocidade da Lua que tende a “jogá-la no espaço” V_1 e a velocidade que conota sua “curva” orbital V_2 . Este triângulo é *semelhante* ao primeiro triângulo, sendo também isósceles: seus lados iguais são V_1 e V_2 , que tem o mesmo módulo (intensidade), V . O ângulo entre eles também é θ .

Quando dois triângulos são semelhantes, há uma proporção entre seus lados. Acompanhando sempre a *Figura 1*, a proporção que nos interessa aqui é:

$$\frac{V \cdot \Delta t}{\Delta V} = \frac{r}{V}$$

Ou seja, o quociente entre as bases do primeiro e do segundo triângulos (respectivamente, $V \cdot \Delta t$ e ΔV) é proporcional ao quociente entre os lados dos mesmos r e V . Assim como fizemos com a notação matemática do conceito de *velocidade*, podemos rearranjar a apresentação dessa igualdade, multiplicando um pelo outro os dois “ V ” da equação (resultando em V^2):

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V^2}{r}$$

Prestando atenção, veremos que chegamos a outro conceito bem conhecido, o de *aceleração*. Em palavras, algo como “a medida de como a velocidade varia ΔV (aumentando ou diminuindo) durante a passagem de certo intervalo de tempo Δt ”. Matematicamente, considerando-se uma aceleração *média*, podemos escrever assim:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

A qual conclusão Isaac Newton (e também Christiaan Huygens) chegou com tudo isso? A Lua está constantemente mudando a direção de seu movimento ao percorrer sua órbita ao redor de nosso planeta. Se não o fizesse, estaria perdida no cosmo. Ora, havendo variação em sua velocidade, podemos chamar esse fenômeno de *aceleração*, uma aceleração direcionada para o centro da Terra, como se o satélite estivesse constantemente “caindo” no planeta. Newton sabia que é necessário uma *força* para gerar aceleração, como enunciado por ele em sua “2ª Lei”:

$$F = m \cdot \frac{dV}{dt} \quad \text{ou, em sua forma mais divulgada,} \quad F = m \cdot a$$

Recordando as relações anteriores, vimos que:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V^2}{r}$$

Substituindo-se este segmento mais à direita (V^2/r) em a de $F = m \cdot a$, chegamos em

$$F=m.\frac{v^2}{r}$$

Esta última equação em palavras: a intensidade da força F , que faz a Lua constantemente mudar a direção de seu movimento e originando sua trajetória orbital, depende diretamente da massa m do satélite, da velocidade que ele viaja pelo espaço (na relação quadrática de V^2) e inversamente de sua distância r do planeta. Quanto maior é a distância, menor é a influência dessa força. Como ela (a força) gera o efeito de uma atração para o *centro* da órbita, é chamada *força centrípeta* (Oliveira Filho; Saraiva, 2017, p. 72).

Ainda não se trata do conceito de *gravitação*. A força centrípeta conforme descrita tem um caráter unilateral e Isaac Newton logo percebeu que, pelo princípio da ação e reação, a Lua ao ser atraída pela Terra, também exerceria sobre o planeta uma força de mesma intensidade, mas de sentido oposto. Haveria também um caráter universal na gravitação e ela poderia explicar as leis de Kepler dos movimentos dos astros (Fabris *et al.*, 2021, p. 68-69).

2.1.2 Da 3ª Lei de Kepler à Gravitação

Para a construção de um conceito de *gravitação* mais adequado ao observado na natureza, em que há interação mútua de forças entre dois corpos celestes, Newton desenvolveu uma argumentação matemática que trouxe ao diálogo uma lei empírica deduzida por Johannes Kepler a partir das anotações de Tycho Brahe.

A lei versa sobre a relação entre o *período orbital* de um astro (o tempo gasto por ele para completar uma volta ao redor de um outro corpo) e o *raio* (a distância) desta órbita. Em termos atuais, ela afirma que “a *potência cúbica do semieixo maior r da órbita do planeta é proporcional ao quadrado do tempo de revolução orbital P* ” (Fabris *et al.*, 2021, p. 58), ou

$$P^2 \propto K.r^3$$

em que K é um valor que muda de acordo com o valor de P e r de cada interação específica de astros.

Veremos como se dá a elaboração de Isaac Newton para a gravitação utilizando essa lei de Kepler partindo de onde paramos no segmento anterior, a descrição da *força centrípeta*, que era:

$$F=m.\frac{v^2}{r}$$

Como Newton, nesse momento ainda estamos considerando a órbita lunar circular. Todo o trajeto ou “contorno” de um círculo (seu perímetro) é medido por $2\pi r$, sendo r seu raio. Logo, o período P de tempo gasto para a Lua dar uma volta completa em torno da Terra com aquela velocidade V é

$$P = \frac{2\pi r}{V}$$

Colocando a ênfase na velocidade, faz o mesmo efeito matemático reordenarmos para

$$V = \frac{2\pi r}{P}$$

Substituindo este valor de V na descrição da *força centrípeta* (revê-la acima), temos

$$F = m \cdot \left(\frac{2\pi r}{P}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} \quad \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \quad F = m \cdot \frac{4\pi^2 r^2}{P^2 r} \quad \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \quad F = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{P^2}$$

Nesse momento entra no diálogo a 3ª Lei de Kepler conforme já exposta ($P^2 \propto K \cdot r^3$), que nos permite fazer uma substituição³:

$$F = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{P^2} \quad \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \quad F = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{K r^3} \quad \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \quad F = m \cdot \frac{4\pi^2}{K r^2}$$

Neste ponto, Newton chegou a algumas conclusões importantes. Primeiro, a força exercida por um astro sobre outro é proporcional à sua massa e inversamente proporcional ao quadrado do raio da órbita em questão, ou

$$F \propto \frac{m}{r^2}$$

Segundo, novamente considerando o princípio da ação e reação, a massa m da Lua (para manter nosso exemplo inicial) atua como uma força de reação sobre a Terra proporcional à massa deste planeta, que é maior M . Isso indica que aquela constante K depende também da massa que exerce a maior força gravitacional (Fabris, 2021, p. 71).

Levando em consideração essas duas últimas observações e substituindo aqueles valores constantes 4 , π^2 e K por uma única constante numérica para o balanceamento universal dos fenômenos interativos da gravitação ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{Kg}^2$), Isaac Newton chegou a um enunciado final para o conceito:

$$F = - \frac{GMm}{r^2}$$

O sinal negativo (-) indica o caráter atrativo dessa força.

³Notar que aqui estamos substituindo o símbolo de “proporcional” ($\propto$), originalmente presente na descoberta de Kepler, pelo de “igualdade” (=) em nome da facilidade de entendimento da narrativa matemática. Até o fim de nossa argumentação, o leitor perceberá que essa “transformação” aparentemente arbitrária torna-se verdadeira quando Newton adiciona ao conceito final de gravitação o que chamamos didaticamente hoje “Constante Universal Gravitacional” (G).

Em palavras, o conceito de *gravitação* narrado pela equação de Newton pode ser entendido como um fenômeno de *atração mútua entre dois corpos, em que a intensidade dessa força é diretamente proporcional à massa de ambos, mas que perde essa mesma intensidade em uma proporção inversa ao quadrado da distância orbital que os separa*.

O caminho para a compreensão dessa grandeza, que foi trilhado em uma interação entre as observações empíricas sobre os movimentos dos astros por Ticho Brahe e Johannes Kepler e a matemática de Isaac Newton, é um exemplo marcante da importância dessa relação para o entendimento e conceituação (nomeação e explicação) dos eventos naturais pelos cientistas.

2.2 A Matemática em desafio ao senso comum: o fenômeno das marés como resultado de forças gravitacionais diferenciais

Talvez um dos fenômenos naturais mais notáveis na Terra decorrente das interações gravitacionais seja o das marés oceânicas. Isaac Newton foi pioneiro na explicação científica dessa relação em 1687. Mais tarde, em 1752, Daniel Bernoulli (1700-1782) criou a primeira tabela de marés mais confiável, que Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) interpretou como uma série de oscilações harmônicas (Macedo, 2013, p. 8). Para todos eles, o diálogo entre informações empiricamente construídas e processos matemáticos foi essencial.

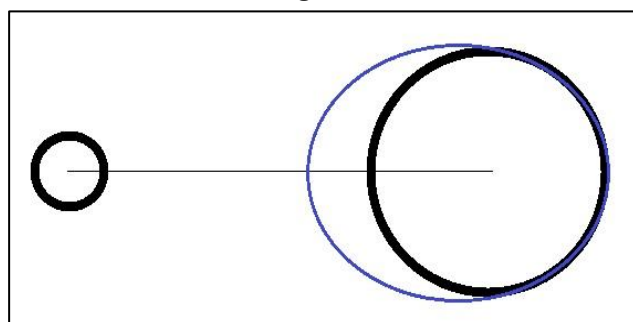
Através das marés, a gravitação revela sua importância para a Geomorfologia, pois produz diferentes deformações na Terra, que podem afetar relevos costeiros e submarinos através dos efeitos de atrito das marés oceânicas sobre as rochas e solo. Atua também diretamente sobre a crosta terrestre como um todo, uma vez que a atração gravitacional do Sol e da Lua também gera em nosso planeta *marés terrestres* (Abreu, 2019, p.1). Estas podem levar a movimentações verticais da crosta de até 10 centímetros (Arana, 2020, p. 2). Partiremos de onde finalizamos a seção anterior: no conceito de *gravitação* de Newton em sua formulação matemática e veremos, como mencionado na Introdução, como uma investigação mais profunda com auxílio das ferramentas matemáticas revela processos da natureza que parecem contradizer o senso comum – fato utilizado pelos movimentos da “pós-verdade” como uma suposta prova da inconfiabilidade da ciência.

2.2.1 Forças gravitacionais diferenciais

A gravitação relaciona-se a uma *força de atração mútua entre dois corpos*, concluímos anteriormente. Também verificamos que a intensidade dessa força depende da proximidade dos corpos, caindo à medida que se afastam em uma proporção quadrática (o r^2 no quociente da equação).

Agora, um exercício importante: se a partir desse ponto contássemos apenas com nossa experiência cotidiana com a força gravitacional da Terra, deixando de lado a Matemática – como advogam os terraplanistas –, provavelmente o senso comum nos levaria a entender o fenômeno das marés oceânicas, decorrente da interação gravitacional de nosso planeta com a Lua, apenas como uma elevação do nível do oceano no “lado” do planeta mais próximo do satélite. Algo como ilustrado na *Figura 2* (imaginando um oceano único e homogêneo na Terra para facilitar a compreensão).

Figura 2.

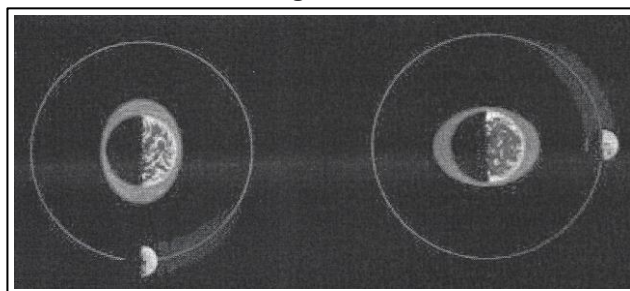


Fonte: Elaborada pelo autor.

Este “bojo de maré”, como dizem os pesquisadores, então provavelmente seguiria o movimento orbital da Lua ao redor da Terra devido a gravitação. Entretanto, isso não é o que ocorre na realidade. Há sim *dois* bojos, localizados em lados opostos do planeta, indicando duas zonas de maré alta simultâneas e que seguem o movimento da Lua, como ilustrado abaixo⁴.

⁴Para uma maior precisão factual, é necessário destacar que os bojos de marés não apontam diretamente para a Lua como na simplificação da imagem. Há um deslocamento de aproximadamente 3° devido à inércia pela diferença no movimento de rotação da própria Terra em relação à translação da Lua (Callegari, 2006, p. 49).

Figura 3.

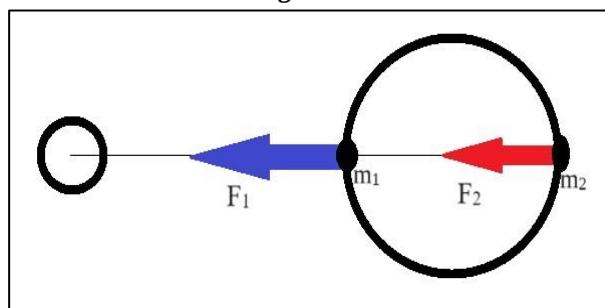


Fonte: Oliveira Filho; Saraiva (2017, p. 95).

A explicação para esse fenômeno aparentemente estranho (em que um dos bojos de maré parece *se afastar* da Lua invés de ser *atraído* por seu campo gravitacional) pode ser construída a partir da formulação matemática da gravitação em seu alcance variável com o quadrado da distância, o que leva ao fato de que a interação gravitacional não gera uma força de atração homogênea em todos os pontos da Terra. Entendamos aos poucos esse efeito.

As investigações sobre as várias intensidades de atuação da força gravitacional dos corpos celestes em diferentes locais de suas superfícies deu-lhes o nome de *força gravitacional diferencial*. Ela é construída a partir da “Lei de Gravitação” de Newton e, em nosso caso, define-se como a diferença entre as forças exercidas por algum corpo externo (a Lua, em nosso exemplo) em diferentes locais da superfície e o centro da Terra. Algo como representado no esquema abaixo,

Figura 4.



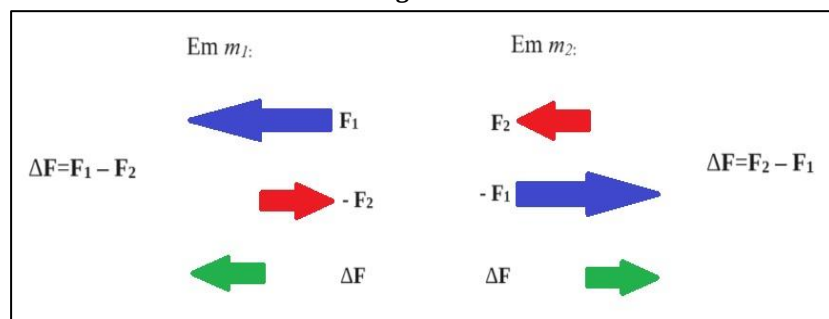
Fonte: Adaptado de Arana (2020, p. 29).

Colocamos a seta vermelha do “lado oposto” da Terra em relação à seta azul (em vez de no centro do planeta), para deixar mais clara a explicação. O que elas significam? A seta maior (azul) representa a força atrativa F_1 , sofrida pela porção pontual de massa m_1 na Terra. Ela é mais comprida para demonstrar que essa força possui maior intensidade que F_2 . Isso

acontece pois ela age sobre o lado mais próximo do planeta em relação à Lua (lembrando que a intensidade da força *cai* na proporção inversa do quadrado da distância em que o ponto está localizado).

A diferença entre as forças atuantes nesses dois pontos, que matematicamente podemos representar por ΔF , pode ser demonstrada como uma soma dos vetores presentes na *Figura 4*. No ponto m_1 , o cálculo da diferença entre as forças é $\Delta F = F_1 - F_2$ (dizer que um vetor é negativo significa que seu sentido é oposto ao original); no ponto m_2 , é $\Delta F = F_2 - F_1$. Visualmente, podemos representar essas operações como mostra a *Figura 5*:

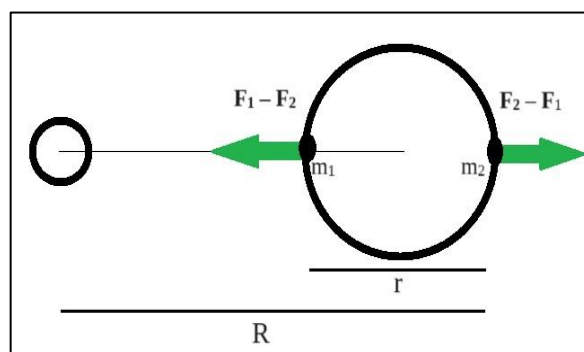
Figura 5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados dessas operações de subtração são as setas verdes. Podemos observados na *Figura 6* a situação concreta dessas forças gravitacionais resultantes entre Terra e Lua. Ela corresponde ao fenômeno real do duplo bojo de marés, mostrado antes, na *Figura 3*.

Figura 6.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Acabamos de fazer a operação com vetores (setas), agora desenvolveremos a mesma operação $\Delta F = F_1 - F_2$, algebricamente, onde cada uma dessas duas forças gravitacionais têm os valores dados pelo conceito de *gravitação* de Newton⁵:

$F_1 = \frac{GMm_1}{(R-r)^2}$ e $F_2 = \frac{GMm_2}{(R)^2}$, sendo R a distância (raio) do ponto m_2 até o centro da Lua e $R - r$ a distância de m_1 até esse mesmo centro (*Figura 6*). Então, voltando à operação $\Delta F = F_1 - F_2$:

$$F_1 - F_2 = \frac{GMm_1}{(R-r)^2} - \frac{GMm_2}{(R)^2} \quad \ggg \quad GM \left[\frac{m_1}{(R-r)^2} - \frac{m_2}{R^2} \right].$$

Caso consideremos os dois pontos da superfície da Terra, m_1 e m_2 , com a mesma massa ($m_1 = m_2$), podemos denominá-los apenas m , o que nos permite “tirá-lo” do colchete e continuar a movimentação matemática.

$$GMm \left[\frac{R^2 - (R-r)^2}{R^2 \cdot (R-r)^2} \right] \quad \ggg \quad GMm \left(\frac{2Rr - r^2}{R^4 - 2rR^3 + R^2r^2} \right) \quad \ggg$$

$$GMmr \left[\frac{2R-r}{R^4 \cdot \left(1 - \frac{2r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right)} \right]$$

Mas na realidade e diferente da ilustração, a distância da Lua até o ponto m_2 é muito maior que o diâmetro da Terra ($R \gg r$), por isso, para nossa demonstração simplificada em busca de conceitos mais gerais, podemos deixar de lado r . Temos, então, $2R - r$ aproximadamente $2R$ e

$\left(1 - \frac{2r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right)$, torna-se aproximadamente 1.

Isso nos leva a uma expressão final para a *força gravitacional diferencial*:

$$\Delta F = \frac{2GMm}{R^3} r$$

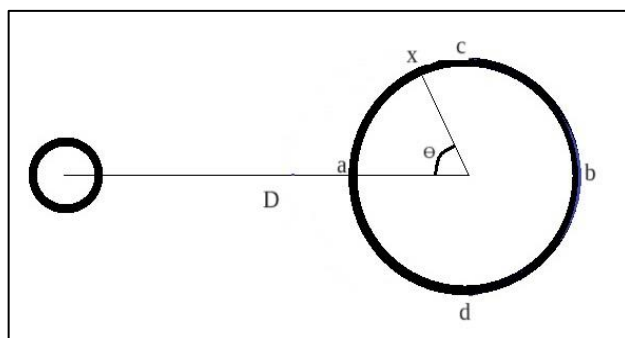
2.2.2 Forças de maré

Para a Geomorfologia Planetária, a relação considerada nesta seção entre a Matemática e a explicação científica de fenômenos naturais (que desafiam o senso comum do observador cotidiano), ganha muita importância pela mencionada dificuldade das coletas de dados mais detalhados *in situ*. No exemplo do planeta Terra, é possível comprovar-se empiricamente a existência real dos dois bojos de maré opostos, ocasionados pela gravitação Terra-Lua, mas a explicação de suas *causas* é muito mais facilitada com o uso da matemática.

⁵Não será necessário realizarmos a operação para o ponto m_2 , $\Delta F = F_2 - F_1$ porque seu resultado é o mesmo que para m_1 , porém com o sinal oposto.

A força de atração gravitacional da Lua sobre diferentes pontos da superfície terrestre gerará diferentes efeitos (forças) como marés oceânicas, por exemplo, sobre os pontos *a*, *b*, *c*, *d* e *x*. Esta variação depende do ângulo θ que estes pontos estão em relação à posição da Lua (Figura 7).

Figura 7.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O leitor interessado no desenvolvimento da equação que nos permite relacionar este ângulo à força de maré pode remeter-se a FABRIS (2021, p. 112-113). Para não nos alongarmos tanto, apresentamo-la diretamente, sendo fácil perceber sua característica como uma força diferencial ao comparar sua estrutura com a equação que fechou o segmento anterior do texto:

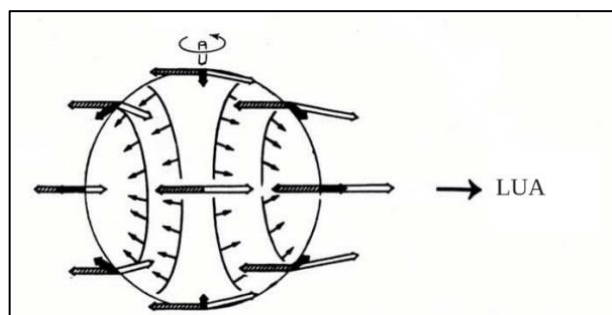
$$F_m \approx -\frac{GM_L r}{D^3} (\cos\theta + \sin\theta)$$

Para o ponto *a* na superfície da Terra, o ângulo θ é 0, gerando uma força de maré máxima em direção ao satélite. Para o ponto oposto, *b*, o ângulo raso indica o sentido oposto (que, em radianos, é π), ou seja, uma força de maré de mesma intensidade que a primeira, mas direcionada contra o sentido da Lua. O mesmo resultado obtido em nossa demonstração de soma de vetores, realizada no segmento anterior desta seção. Já para os pontos *c* e *d*, o ângulo θ (em radianos) é respectivamente $\pi/2$ e $-\pi/2$. Suas componentes paralelas – “em direção” – à Lua (o “cos” na equação) se anulam e o que resta são as componentes perpendiculares gerando, mais uma vez, o efeito ilustrado na Figura 3.

Não é nosso objetivo estudar em profundidade as marés oceânicas em nosso planeta. Se fôssemos tratar o assunto com maior rigor deveríamos ter em mente que as forças gravitacionais das marés não conseguem sozinhas se sobrepôr à atração gravitacional da própria Terra para mover as águas. Comporiam também os cálculos as componentes

tangenciais à superfície da Terra e a *pseudoforça centrífuga* relativa à rotação do planeta (Macedo, 2013, p. 14-15). A matemática torna-se mais complicada para a modelagem de todas as forças envolvidas e o resultado é um jogo que dificilmente seria previsto apenas pelo senso comum (*Figura 8*):

Figura 8 – As *setas finas* representam as componentes paralelas das forças geradoras das marés. As *setas pretas grossas* representam as forças geradoras das marés, que resultam da diferença entre as *setas brancas*, a força gravitacional diferencial, e as *setas tracejadas*, que indicam a pseudoforça centrífuga da rotação da Terra.



Fonte: Adaptado de Macedo (2013, p. 18).

2.3 A Matemática como ferramenta heurística na separação das causas dos fenômenos naturais: Ressonância de Laplace e forças de maré em Europa

As forças de maré possuem um caráter diferencial, ou seja, são variáveis para cada pequena porção de massa do planeta que esteja em uma posição e angulação diferente em relação à fonte do campo gravitacional destacado. Elas são variáveis também em relação ao tempo, pois mudam conforme os astros avançam em seu movimento orbital. Entretanto, na prática de sua pesquisa, como o cientista natural interessado nos efeitos geomorfológicos das marés tem acesso empírico às forças que as envolvem, mas que são “invisíveis” aos nossos olhos, sentidos e escala humanos?

Daniel Arana mostra-nos que quando medimos diretamente as forças gravitacionais resultantes em pontos específicos da superfície de nosso planeta usando aparelhos chamados “*gravímetros*”, o número obtido carrega simultaneamente (“misturados” naquele valor) dados de diferentes fenômenos que compõem aquelas forças: marés terrestres, cargas oceânicas, cargas atmosféricas, a movimentação do núcleo planetário, movimentos dos polos, atividades

sísmicas, deriva do instrumento, ruídos externos etc. (Arana, 2020, p. 21)⁶. É exatamente a Matemática, em muitas de suas técnicas, que auxilia o cientista na separação de cada uma daquelas informações, como exemplifica o autor ao citar as *funções de Green*, usadas para calcular a contribuição da carga oceânica para a variação total do potencial gravitacional e a *geometria esférica*, fundamental para revelar vetorialmente cada componente das marés (Arana, 2021, p. 31-38). A mensuração desses componente é essencial para a definição da constituinte de cada frequência de marés, que tem amplitudes e fases variáveis (ABREU, 2019, p. 18).

2.3.1 Ressonância de Laplace nos satélites jovianos

A investigação científica do sistema lunar de Júpiter começou com Galileu Galilei em 1610, que descobriu seus quatro maiores satélites, batizados “luas galileanas” por esse feito: Io, Europa, Ganímedes e Calisto (Greeley, 2013, p. 147). As primeiras imagens dessas luas feitas por sondas espaciais, o foram em 1973 e 1974 por *Pioneers 10* e *11*, mas com qualidade muito baixa; foram *Voyager 1* e *2* (1979), cujas estabilizações por foguetes ajudaram na focalização das fotografias, que conseguiram maior nitidez nas imagens (2Km/pixel) (Greeley, 2013, p. 147-148).

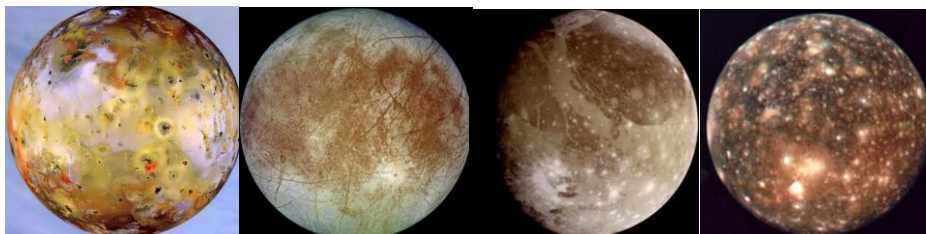
Todavia, a maior parte dos dados e fotografias (em resolução média de 7m/pixel e máxima de 50m/pixel) utilizados pelos cientistas atualmente provém da sonda *Galileo*, que a partir de 1989 investigou o sistema joviano com diferentes sensores e instrumentos (Daubar; Hayes, 2024, p. 5)⁷. Em abril de 2022 foi lançada pela Agência Espacial Europeia a missão *JUICE* (*Jupiter Icy moons Explorer*), que a partir de 2031 deve entrar na órbita de Júpiter e coletar dados também de Ganímedes, Calisto e Europa. Por fim, em outubro de 2024 foi realizado o lançamento da missão *Europa Clipper*, que a partir de 2030 buscará conseguir

⁶No passado baseados no movimento de um pêndulo, os gravímetros hoje utilizam a precisão de raios laser e prismas fixos e móveis (para medição por queda livre e registro das fases de onda dos raios por detectores).

⁷Os estudos geomorfológicos de Europa, foram construídos em grande medida a partir dos instrumentos e detectores levados pela sonda *Galileo*, que incluíam: espectrômetro de mapeamento no infravermelho próximo, espectrômetro ultravioleta, câmera para imagem de estado sólido, radiômetro fotopolarímetro, magnetômetro, detector de partículas energéticas e de plasma, subsistema de onda de plasma, detector de poeira e contador de íons pesados. Informações divulgadas pela NASA em science.nasa.gov/missions/galileo.

mais informações sobre a composição da crosta da lua, as propriedades químicas e físicas de seu oceano e a formação de sua superfície⁸.

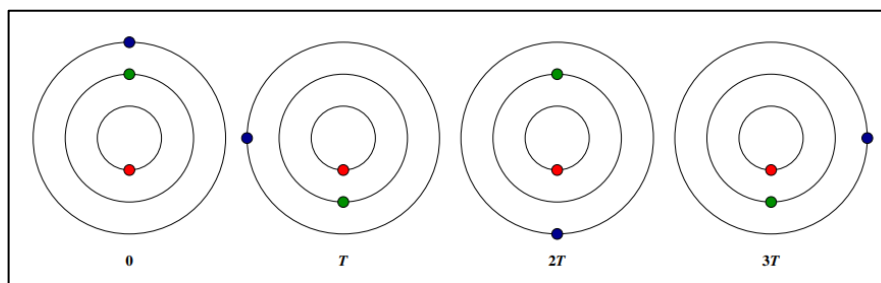
Figura 9 – Da esquerda para a direita: Io, Europa, Ganímedes e Calisto. Respectivamente Galileo (1996), Galileo (1996), Galileo (1996) e Voyager 2 (1979).



Fonte: NSSDCA/NASA - <https://nssdc.gsfc.nasa.gov>.

Uma das características que há séculos chama a atenção dos pesquisadores sobre os maiores satélites de Júpiter – e que também é de grande interesse para essa pesquisa – é que três delas, Io, Europa e Ganímedes, mantêm uma relação de *ressonância* em suas órbitas. O conceito de *ressonância* é utilizado pelos cientistas planetários para os casos em que a *razão matemática* entre os períodos orbitais dos satélites é muito próximo de 2. Quando se chega a esse valor (dito uma *comensurabilidade exata*) os efeitos gravitacionais dinâmicos sobre as luas são mais intensos (CALLEGARI JR, 2006, p. 43). As três luas estão sincronizadas, no caso, em uma taxa muito próxima de 4:2:1. Em palavras: enquanto Io completa quatro voltas em torno de Júpiter, Europa o faz duas vezes e Ganímedes apenas uma (GREELEY, 2013, p. 149). O esquema apresentado por Paita et. al. (2018, p. 2) ajuda-nos a visualizar essa relação:

Figura 10 – O círculo vermelho representa Io, o verde representa Europa e o azul, Ganímedes. Observando em sentido anti-horário, enquanto Io completa uma volta ao redor de Júpiter, Europa realiza apenas metade de seu trajeto orbital e Ganímedes um quarto, chegando na razão 4:2:1.



Fonte: Paita (2018, p.2).

⁸Ver, respectivamente essa.int/Science_Exploration/Space_Science/Juice. Acesso: 20/11/2023 e *NASA Space Science Data Coordinated Archive* (NSSDCA): <https://nssdc.gsfc.nasa.gov> Acesso: 20/11/2023.

Esta sincronia foi descrita matematicamente por Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) em seu *Traité de Mécanique Céleste*, por isso ficou conhecida como “Ressonância de Laplace” (Paita et. al., 2018, p. 1). Ela é composta por um par de interações *quasi-ressonantes* 2:1 (uma ressonância quase exata), que matematicamente podem ser descritas como:

$$n_1 - 2n_2 = 0,7395507361^\circ/\text{dia}$$

$$n_2 - 2n_3 = 0,7395507301^\circ/\text{dia}$$

em que n_1 , n_2 e n_3 são os movimentos orbitais de Io, Europa e Ganímedes, respectivamente. Pode-se ainda adicionar uma ressonância mais fraca entre Ganímedes e Calisto n_4 , em $3n_3 - 7n_4 = -0,049084320^\circ/\text{dia}$ (Paita et al., 2018, p. 1).

Laplace usou essas relações para mostrar a existência do que foram denominados “Ângulos de Libração”, que medem o quanto as luas oscilam – estão em “libração” – em relação à posição de equilíbrio na ressonância:

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 + \omega_2 \approx 180^\circ$$

$$\lambda_2 - 2\lambda_3 + \omega_2 \approx 0^\circ$$

Em que λ_i indica a longitude média do satélite em questão e ω_i as longitudes de seu perijove (ponto da órbita de uma lua de Júpiter mais próximo do planeta)⁹. Essas equações combinam-se no “Argumento Laplaciano”, que mede o deslocamento angular entre os corpos em ressonância:

$$\phi_L \equiv \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 \approx 180^\circ$$

É em especial este argumento, que varia em amplitude e período ao longo do tempo, que se tenta compreender o movimento dos astros em ressonância (Paita et al., 2018, p. 1).

Após Laplace, no início século XIX, outros pesquisadores criaram modelos matemáticos mais precisos para descrever as relações de ressonância, alguns baseados na mecânica newtoniana, outros na mecânica hamiltoniana (Silva et al., 2012)¹⁰. Paita et al., (2018, p.3) apresentam uma formulação newtoniana para o sistema diferencial básico, válido para uma lua qualquer de Júpiter. Ele leva em conta as interações gravitacionais mútuas entre os satélites e também destes com o planeta:

⁹Mais tarde, descobriu-se que o sistema é afetado por uma relação adicional de libração, descrita como $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \omega_1 \approx 0^\circ$ (PAITA, 2018, p. 1).

¹⁰O modelo desenvolvido por R. Sampon em 1921 (*Theory of the four great satellites of Jupiter*) e depois corrigido e ampliado por J. Lieske em 1977 e 1997 (*Galilean satellite ephemerides*) para o rastreamento das órbitas é uma importante referência para pesquisadores atuais.

$$\ddot{r}_i = \frac{-G \cdot (m_0 + m_i)}{r_i^3} r_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n G m_j \left(\frac{r_j - r_i}{r_{ij}^3} - \frac{r_j}{r_j^3} \right) + G \cdot (m_0 + m_i) \nabla_i U_{i0} + \sum_{j=1, j \neq i}^n G m_j \nabla_j U_{j0}$$

(A) (B) (C) (D) (E)

O que esta equação consegue obter – após ainda muito trabalho de desenvolvimento matemático! – são aqueles ângulos mostrados anteriormente ($0,7395507361^\circ$ para $n_1 - 2n_2$ e $0,7395507301^\circ$ para $n_2 - 2n_3$), que permitem chegar ao Argumento Laplaciano e suas variações temporais dos movimentos das luas. Não é nosso objetivo resolver a equação, mas o entendimento de seus trechos pode ajudar em nossa reflexão sobre o papel da Matemática na compreensão dos eventos naturais – aqui, o movimento de uma das luas galileanas em ressonância.

Analiticamente, cada segmento (separados entre si pelos sinais de “=” e de “+” e destacados pelas letras maiúsculas imediatamente abaixo de cada um) indica a tentativa heurística do pesquisador em selecionar as composições de seu interesse no fenômeno. Vejamos cada um deles:

(A) – Apenas r_i , sem o “trema” sobre ele, representaria o vetor indicativo da localização da lua escolhida. O acréscimo deste sinal mostra a derivação duas vezes dessa posição no tempo, revelando também a busca pelas acelerações do movimento do satélite. O leitor deve recordar-se da importância da *aceleração* para o movimento orbital de um astro, discutido na primeira seção do artigo.

(B) – Não é difícil reconhecer aqui a participação da gravitação de Newton, discutida nas seções anteriores, incluindo aí seu caráter diferencial, e base de toda a construção do conhecimento sobre a ressonância das luas jovianas. O m_0 representa a massa de Júpiter e m_i a massa da lua escolhida para estudo.

(C) – Acrescenta-se à equação básica um somatório Σ de várias posições relativas entre as luas, acompanhadas da Constante Universal de Newton e da massa da lua de interesse, em ressonância m_j .

(D) – Relaciona-se ao potencial de atração gravitacional U entre Júpiter e dada lua. Notar mais uma vez a importância da Constante Universal e da massa dos astros. O símbolo ∇ , “nabla”, é usado como um “operador diferencial”, uma forma compacta de se demonstrar a busca por valores do potencial de atração gravitacional derivados das três dimensões somadas (eixos “x”, “y” e “z”, nesse caso) (Barcelos Neto, 2010).

(E) – O último termo da equação relaciona, ou melhor, soma, todos os aspectos anteriores às forças indiretas que afetam o movimento da lua estudada, decorrentes do “achatamento” (*oblação*) de Júpiter, que influencia de modo diferente a ressonância entre Io, Europa e Ganímedes (Paita *et al.*, 2018, p. 3-5).

Por que é tão importante para o cientista natural interessado em um satélite galileano de Júpiter um grau de detalhamento matemático como esse? Por que o esforço heurístico em identificar cada pequeno evento integrante da movimentação dos satélites – como as oscilações de suas órbitas, o achatamento de Júpiter etc. – e depois uni-los novamente através desta equação? Somente assim podemos finalmente realizar a ligação entre os dois fenômenos naturais presentes no título dessa pesquisa: a *gravitação*, que discutimos passo a passo da construção de seu conceito até sua participação na Ressonância de Laplace, e a *formação do relevo da superfície de Europa*. Infelizmente, não é suficiente apenas apontarmos nossa câmera para a lua para chegar a esse resultado.

São as perturbações gravitacionais mútuas entre Io e Europa, Europa e Ganímedes, na razão orbital de 4:2:1 e medidas pelos Ângulos de Libração e o Argumento de Laplace, que transferem energia (e momento angular) entre elas. Energia que se dissipa no interior de cada lua na forma de marés. No caso de Io é a principal fonte de seu intenso vulcanismo; em Europa, resulta no tectonismo que age periodicamente em sua crosta gelada, gerando as mais diversas morfologias em seu relevo (Oliveira *et al.*, 2005, p. 1).

2.3.2 Marés e dissipação de energia

No planeta Terra, a interação gravitacional com a Lua – que, como visto, gera forças diferenciais, neste caso, diferentes em cada ponto do planeta – produz um efeito de deformação em sua crosta e oceanos: as marés terrestres e oceânicas. Em ambos os casos trata-se da geração de *energia de movimento* (cinética), que também gera calor devido o atrito dessas massas ao se moverem (Callegari JR, 2006, p. 49).

Toda essa energia “extra”, em consonância com a tendência natural de conservação de momento angular do sistema orbital entre Terra e Lua, gera alguns principais efeitos que quebram a aparente harmonia conservativa do sistema. Primeiro, ela produz um aumento gradual da distância entre nosso planeta e seu satélite (ordem de 3,47 cm/ano); segundo, leva à desaceleração na rotação da Terra (cerca de 0,002 s/século) (Callegari JR, 2006, p. 49-50).

Isso porque falar inicialmente em “conservação do momento angular” de um grupo de corpos celestes em relação orbital/gravitacional (um “sistema”) implica um torque (força que gera rotação) resultante nulo. Em outra palavra, resulta um *equilíbrio*.

Explicando melhor: se algum fator de força gravitacional, como os vários fatores descritos na equação do segmento anterior, leva a uma “sobra” em relação às forças que já mantém o sistema orbital e/ou ressonante equilibrado, isso gerará algum fenômeno natural, mecânico ou térmico, nos astros. No caso da Terra, os dois primeiros efeitos mencionados: o afastamento da Lua e a frenagem da rotação de nosso planeta. Para nosso satélite, o aquecimento de sua estrutura interna e circularização de sua órbita (Callegari JR, 2006, p. 50).

E quais são os efeitos produzidos pelas marés gravitacionais em Europa, que compõe um sistema ressonante muito mais complexo, envolvendo forças periodicamente compartilhadas não só com seu planeta, mas também com suas irmãs Io e Ganímedes (e em muito menor medida, Calisto)? O desvio em relação a um trajeto ideal na Ressonância de Laplace, medido pelo ângulo de libração, no caso de Europa tem efeito oposto ao de nossa Lua: presa em sua forte ressonância, sua órbita não se torna mais circular, mas mantém-se forçadamente “achatada” (elíptica) – ou, em termos mais técnicos, com maior *excentricidade* (Callegari JR, 2006, p. 43, 52)¹¹.

Callegari Jr (2006, p. 44) apresenta essa relação em uma equação simples:

$$e_f = \frac{C}{2n_2 - n_1}$$

Em que e_f refere-se ao grau de excentricidade forçada, C um valor numérico constante que depende dos semi-eixos maiores das órbitas dos dois satélites em ressonância e n_1 e n_2 as velocidades angulares dessas luas. Quanto mais próximo esses dois valores estiverem de uma razão de “2 para 1” (2:1, a “*comensurabilidade exata*”), maior a excentricidade, ou seja, o “achatamento”, da órbita.

Como dito, a energia das marés recebida por Europa não pode ser usada para circularizar seu trajeto por ela estar “presa” na Ressonância de Laplace (ERSHKOV; Leshchenko, 2021, p. 2). Entretanto, qualquer forma de energia não pode simplesmente “desaparecer”. Em Europa ela acaba por se manifesta como *movimento* (e devido seu atrito,

¹¹A excentricidade forçada de Europa é por volta de 0,0101. De outra forma seria ainda mais próxima de um círculo, que tem excentricidade 0,0000.

como *calor*) de seu vasto e profundo oceano e como *tectonismo* em sua crosta de gelo (Ershkov; Leshchenko, 2021, p. 2, 4).

2.4 Do modelo matemático à composição explicativa do fenômeno empírico: a geomorfologia da crosta gelada de Europa

Ao longo das seções anteriores, discutimos três diferentes possibilidades de contribuições da Matemática ao debate epistemológico com as Ciências Naturais, representadas aqui pela Geomorfologia Planetária. Dedicamos inicialmente maior atenção à exposição dos caminhos matemáticos – sempre em interação com os eventos empíricos – elaborados por pesquisadores para a *construção dos conceitos explicativos* para esses fenômenos (primeira seção). A mesma estratégia foi usada na reflexão sobre como a Matemática pode *oferecer caminhos diversos de entendimento* para os acontecimentos naturais que, em um primeiro contato, o observador cotidiano pode considerar contraditórios ao senso comum (segunda seção). A linguagem e narrativa matemática acompanhou-nos também na terceira seção, onde discutimos sua utilização para a *divisão das diferentes causas e processos formativos de um mesmo fenômeno*, que, em um contato empírico circunstancial podem não se revelar tão claramente, ou seja, separados analiticamente entre si.

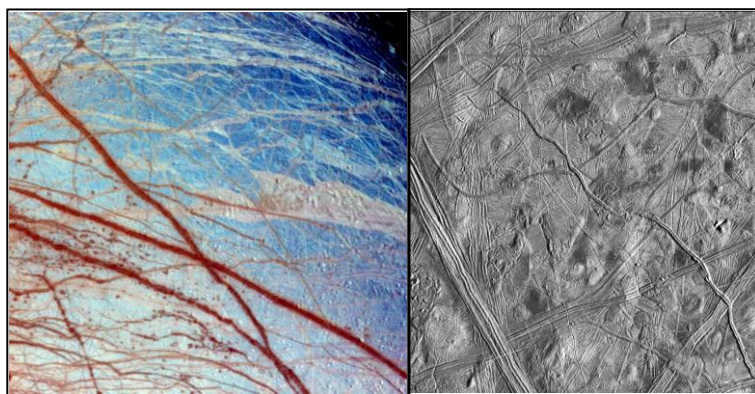
A última seção deste artigo objetiva fechar o ciclo de nossa reflexão rumo à descrição explicativa final sobre as formações de relevo da crosta gelada de Europa, conforme registradas pelas sondas espaciais desde a década de 1970. As equações e narrativas em linguagem matemática, “desaparecerão” aos poucos de nosso texto, ou, mais corretamente, retornarão à própria explicação do fenômeno geomorfológico.

O leitor perceberá agora que todos os modelos matemáticos apresentados anteriormente ainda “estão ali”, fazendo parte do alicerce epistemológico que permite as explicações sobre o relevo manterem sua coerência científica e seu valor descritivo para os processos naturais. Um lembrete para o “consumidor final” daquele conhecimento – atualmente em grande parte usuários de redes sociais e sites de vídeos como o *Youtube* – de que as conclusões e descrições do evento foram construídas sustentadas em um caminho interativo entre dados empíricos e modelos matemáticos dinamizados.

Quando em 1989 as primeiras imagens de melhor resolução da superfície de Europa começaram a se enviadas pela sonda *Galileu*, pôde-se compreender melhor a superfície cheia

de ranhuras revelada uma década antes pela *Voyager*. O relevo prevalecente de extensas e brilhantes planícies geladas era profundamente modificado por processos tectônicos com as mais diversas formações, incluindo longas estruturas lineares entrecruzadas, com mais de 100Km de extensão (Greeley, 2013, p. 156-157).

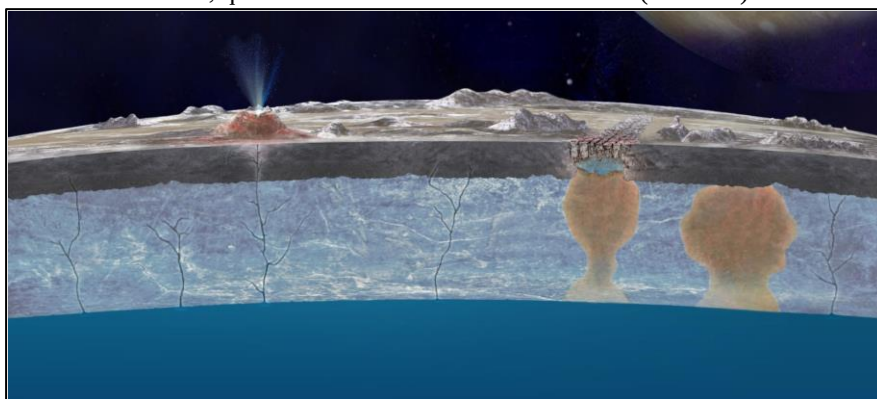
Figura 11 – Esquerda: composição colorizada para destacar áreas de relevo com contaminação no gelo (vermelho e marrom) e planícies gelo salgado mais puro (azul), Galileo (1996). Direita: área destacada de 130x140 km da superfície de Europa, marcada por formações de Cristas Duplas e Cicloidais e também Domos *Lenticulae*. Galileo (1997).



Fonte: NSSDCA/NASA – <https://nssdc.gsfc.nasa.gov>.

Em várias áreas e formações, a crosta de água congelada da lua mostrou-se como uma mistura de diferentes substâncias, com provável presença de sais de magnésio e sódio, carbonatos, compostos sulfúricos e sulfídricos (Shoji, 2018, p. 9). Por hipótese, há três possíveis origens para essas diferentes substâncias: trazidas de outros pontos do universo por meteoros; plumas vulcânicas oriundas de Io, no caso de compostos de enxofre; a própria rocha de Europa, presente abaixo do oceano (Greeley, 2013, p. 157,162). Pesquisadores tendem a considerar com mais ênfase que os tons mais escuros, marcantes nas cicatrizes geomorfológicas da superfície congelada de Europa proviriam de substâncias de seu próprio núcleo externo através do oceano, sendo erupcionadas por gelo aquecido através de fissuras na crosta (ver representação na *Figura 12*). A energia das marés seriam fundamentais nesse processo (Figueiredo, 2019, p. 256) (Rabinovich, 2011).

Figura 12 – Imagem de divulgação da missão *Europa Clipper* da NASA, mostrando o oceano de Europa (parte inferior da imagem), sua crosta de gelo e fissuras, com áreas de ascensão de minerais (camada azul intermediária e manchas marrons) e formações de relevo superficial. Abaixo do oceano estaria o núcleo externo (rochoso) do satélite, que recobriria ainda um núcleo central (metálico).



Fonte: <https://europa.nasa.gov>.

Além da compreensão de sua composição química, os estudos sobre o tectonismo gerado pelas marés em Europa tornaram-se ferramentas para os pesquisadores tentarem descobrir a idade do satélite (e, com isso, do sistema joviano como um todo). Isso porque na falta de amostras diretas, a Geomorfologia Planetária tenta estabelecer uma *idade relativa* para os astros através de indícios em seus relevos, como formações superpostas, junto ao tamanho e distribuição de crateras de impacto. Em teoria, superfícies mais antigas tiveram tempo de ser mais alvejadas por meteoros (Greeley, 2013, p. 20). Estudos chegaram a uma margem de idade para a superfície de Europa, considerada recente, ou “jovem”, em comparação com nossa Lua: algo entre 10 e 100 milhões de anos (Figueiredo, 2019, p. 256). Isso significa que o relevo da crosta congelada é constantemente renovado por diferentes processos de carácter majoritariamente tectônico (Figueiredo, 2019, p. 256).

Até o momento, como visto na terceira seção, todo o esforço dos cientistas leva-nos a crer que os processos de transformações geomorfológicas da superfície do satélite possuem como uma das principais causas os pulsos periódicos de energia cinética/térmica provocados por marés. A perturbação do equilíbrio potencial na gravitação ressonante do sistema formado entre Júpiter e as luas galileanas seria respondido em Europa pelo aquecimento e movimento de seu oceano e fissuras em sua crosta (Goldreich; Mitchell, 2010, p. 634).

A dinâmica energética de Europa é, de fato, muito intensa. Entre os satélites de Júpiter é apenas inferior à de Io. Para uma lua tão distante do Sol já é um indício notável dessa dinâmica a amplitude térmica provável de sua superfície, com médias diárias de 96K (-177,15 °C) em seu equador e 46K (-227,15 °C) nos polos (Askenazy, 2019, p. 31). Calcula-se que no

prazo de 10 milhões de anos (base hipotética para a idade de sua superfície), 10^{13} watt de energia foram dissipados pela estrutura de Europa, aquecendo seu interior e causando sua expansão (Goldreich; Mitchell, 2010, p. 12). Mesmo se essa dispersão de energia ocorresse de forma homogênea por todo o satélite (e a dispersão real *não* se dá de forma homogênea) a tensão gerada seria da ordem de 4 MPa (4 megaPascal, ou 4.000.000 Newton/m²), o que já seria bem acima do necessário para quebrar o gelo da crosta (Goldreich; Mitchell, 2010, p. 12).

2.4.1 A dinâmica do oceano e da crosta superficial de Europa

Até o momento, há consenso entre os cientistas sobre a existência de um único e maciço oceano de água salgada na subsuperfície de Europa, com uma profundidade presumida de até 100Km (Ashkenazy; Tziperman, 2021, p. 2). Evidências empíricas dele incluem a medição pelo magnetômetro de *Galileo* de um fluxo de corrente eletromagnética induzida compatível com a solução iônica de água salgada (KIMURA, 2024) (Goldreich; Mitchell, 2010). Em 2014 e, novamente, em 2016 foram flagradas pelo telescópio espacial Hubble duas erupções fluídas (chamadas “plumas”) a partir do mesmo ponto da superfície da lua, possivelmente compostas de água¹².

Jansen *et al.*, (2023, p. 3) propõem uma equação geral para o equilíbrio dinâmico da energia cinética atuante no oceano de Europa a partir da energia potencialmente produzida pelas forças de marés (juntamente ao fluxo vertical da água salgada por diferenças de temperatura e densidade do próprio oceano):

$$\int \omega b \cdot dV + \int vT \cdot dV = \int vD \cdot dV$$

O símbolo matemático $\int$ (“integral”) acompanhado pelo $\cdot dV$ nos três segmentos da equação indica que está se considerando um somatório de todo o volume V do oceano. O par ωb representa a energia cinética do volume oceânico em que apenas ω é a velocidade radial aproximada das águas e b a energia da flutuabilidade da água salgada (dependente de sua densidade e da força gravitacional). O par vT é a energia cinética do volume oceânico relativo à velocidade linear das águas v e a força de maré T . A soma dessas duas faces da energia

¹²Informação divulgada pela NASA em europa.nasa.gov/why-europa/europa-up-close.

cinética atuante no oceano, idealmente correspondem a uma dissipação da energia devido ao movimento v das águas como uma força de atrito D (Jansen *et al.*, 2023, p. 2-3).

A dinâmica energética oceânica está em interação direta e constante com a crosta gelada que recobre as águas de Europa, que talvez possua uma espessura entre 20-30km (Culberg *et al.*, 2022, p. 2), com seu fluxo de salinidade e variações de temperatura (Kang, 2022, p. 1). Essa influência, somada diretamente às forças de marés, gera uma dinâmica convectiva também na crosta, com a alteração da temperatura de fusão e demais propriedades do gelo, como a viscosidade, capacidade calorífica, densidade e condutividade térmica. Com tudo isso há derretimento parcial ou total em várias áreas sendo a resistência e elasticidade geral da crosta alteradas, deixando mais fácil o surgimento de rachaduras pela distensão ante a tensão recebida (Carnahan *et al.*, 2020, p. 2).

2.4.2 Formações de relevo

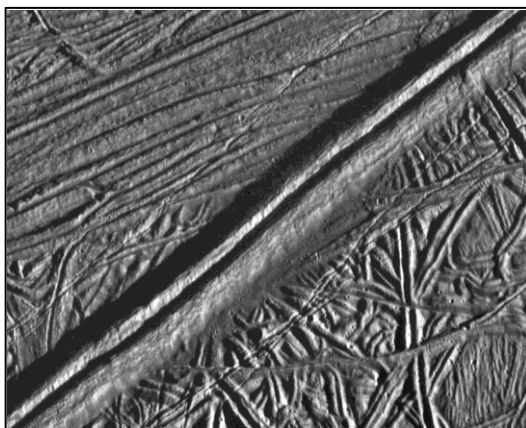
Até mesmo pela baixa proporção do mapeamento superficial de Europa – imagens de alta resolução como 50m/pixel só foram registradas até agora para 0,03% da crosta de gelo do satélite –, não há entre os estudiosos uma catalogação fixa para suas formações (Daubar; Hayes, 2024, p. 5). Para uma escala regional (com imagens registradas entre 1 e 100Km), uma possibilidade atual agrupa-as em sete categorias principais: *cristas* (“ridges”), incluindo aí as simples, duplas e cicloidais; *faixas* (“bands”); *estruturas de impacto* (“impact features”), como as crateras simples e complexas; *terrenos caóticos* (“chaos terrain”), que incluem microcaos, caos laminados e caos nodosos; *planícies suaves* (“smooth plains”); *domos* (“domes”), sejam com fissuras ou não e *poços* (“pits”) (Daubar; Hayes, 2024, p. 9). O grupo *lenticulae*, uma classificação mais antiga, que foi mantido aqui (mais adiante) devido a sua importância nos primeiros trabalhos sobre a geomorfologia de Europa, era usado por autores para reunir as posteriores categorias de domos, poços e pequenas áreas de microcaos e de planícies suaves.

O relevo superficial de Europa é rico e complexo, repleto de formações sobrepostas e entrecruzadas, que refletem também a dinâmica das interações energéticas entre oceano e crosta da lua, movidas sobretudo pelas marés. Entretanto, dado o caráter de nossa pesquisa, que se ocupa mais propriamente do desenvolvimento matemático dos estudos da Geomorfologia Planetária, não buscamos esgotar todas as suas categorias de relevo de

Europa, mas apresentar algumas descrições estruturais e formativas em relação às marés gravitacionais. É o que apresentamos a seguir.

Cristas Duplas (“Double Ridges”)

Figura 13 – Área de 14x17Km, com destaque central a uma formação de Crista Dupla de aproximadamente 2,6Km de comprimento e 300m de altura. Galileo (1997).

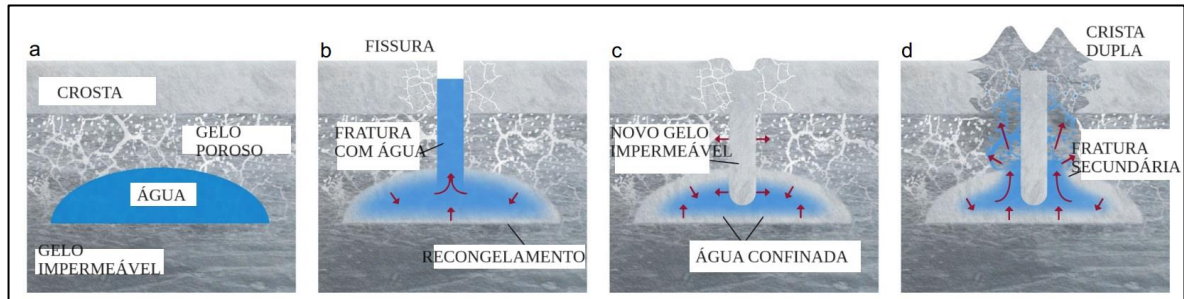


Fonte: NSSDCA/NASA – <https://nssdc.gsfc.nasa.gov>.

As *cristas duplas*, pares de elevações praticamente simétricas flanqueando um canal central, são as formações mais comuns de Europa (Culberg, 2022, p. 2). Podem se estender por 500Km, com 2,0Km de largura e várias centenas de metros de altura, cruzando-se em uma rede complexa, o que revela uma história de surgimentos sucessivos (Greeley, 2013, p. 158) (Prockter *et al.*, 2000, p. 9483).

Há diferentes hipóteses, empírica e matematicamente fundamentadas, para o surgimento das cristas duplas: a compressão da crosta pela força das marés, diapirismo (subida de material menos denso pela camada mais densa), intrusão de água no gelo, formação de cunhas no gelo, criovulcanismo. Todas pressupõem o fraturamento da crosta (Culberg, 2022, p. 2). Alguns desses modelos (com exceção da compressão e diapirismo), evocam interação direta desta com o oceano, ocorrendo derretimento interno ou injeção de água salgada no gelo; outros sugerem recristalizações sucessivas sobre corpos d’água rasos (soleiras ou diques), de maneira similar ao ocorrido com uma crista dupla encontrada no gelo da Groenlândia, como exemplificado na *Figura 14* (Culberg, 2022, p. 2-3).

Figura 14 – Na sequência hipotética: (a) Água presente na crosta média proveniente do oceano ou por derretimento devido ao movimento convectivo de calor, (b) Fratura por excesso de tensão no gelo poroso e, depois, na superfície da crosta, (c) A fissura é deformada e dividida em duas partes pelo recongelamento da água da fratura vertical, (d) A crista dupla se desenvolve por tensão interna devido ao recongelamento das águas inferiores, que pressionam os flancos enfraquecidos do conduto central de gelo impermeável.



Fonte: Adaptado de Culberg (2022, p. 4)

Cristas Cicloidais (“Cycloidal Ridges”)

Um formato particular de cristas existente em Europa é muito interessante para vislumbrarmos os efeitos da periodicidade das marés gravitacionais no relevo; são as chamadas *cristas cicloidais* (Figura 15).

Figura 15 – Duas formações de cristas cicloidais (separadas por uma cratera) de aproximadamente 50-80Km de comprimento. Galileo (1997).



Fonte: NSSDCA/NASA – <https://nssdc.gsfc.nasa.gov>.

Através de dados colhidos pela sonda *Galileo* e modelos matemáticos aperfeiçoados por décadas, pesquisadores dedicados a compreender essa formação procuraram qual poderia

ser a intensidade da força (mais corretamente, *pressão*) resultante de maré diurna sobre a crosta de Europa. O valor descoberto gira em torno de 40-220 KPa (kiloPascal) (HOPPA et.al., 1999). A impressão inicial foi que tal pressão seria muito baixa se comparada ao necessário para rachar o gelo natural terrestre, que tem uma força de tensão média mínima de 196 ± 50 KPa (com uma fração de volume ocupada por poros entre 0,15 e 0,25) (LEE et al., 2005, p. 368-369).

Concluiu-se que para as fissuras iniciarem-se com tal valor de pressão diária, o gelo da crosta de Europa deve ser altamente poroso e rico em sal (bolhas de água salgada formam cavidades no gelo, que reduzem sua resistência), características que medidas de radar parecem realmente confirmar. A porcentagem de poros por volume encontrada no satélite é maior que a encontrada em glaciares terrestres (Lee et al., 2005, p. 368-369). Assim sendo, a amplitude de tensão calculada para Europa voltou a ser considerada factível para iniciar rachaduras cicloidais em sua crosta.

A característica cíclica (ou cicloidal) desta formação específica deve-se ao caráter periódico das marés na situação de ressonância em que se encontra Europa. Observar na *Figura 15* o trajeto da formação à esquerda da cratera, que desenha uma “onda” ao longo da superfície do gelo. Uma fissura se inicia e se propaga horizontalmente na parte superior da crista (pois o peso do próprio gelo tende a fechar os poros na porção inferior) quando a tensão de maré que atinge aquele local ultrapassa a força de ruptura média do gelo. À medida que a lua se move em sua órbita para longe do jovicentro, a intensidade dessa força cai para baixo daquele valor mínimo e a rachadura para de se desenvolver. No dia seguinte, uma nova fissura se forma no fim da anterior, pois ali está a maior tensão acumulada, à medida que a pressão de maré mais uma vez ultrapassa o valor mínimo (Lee et al., 2005, p. 369-370).

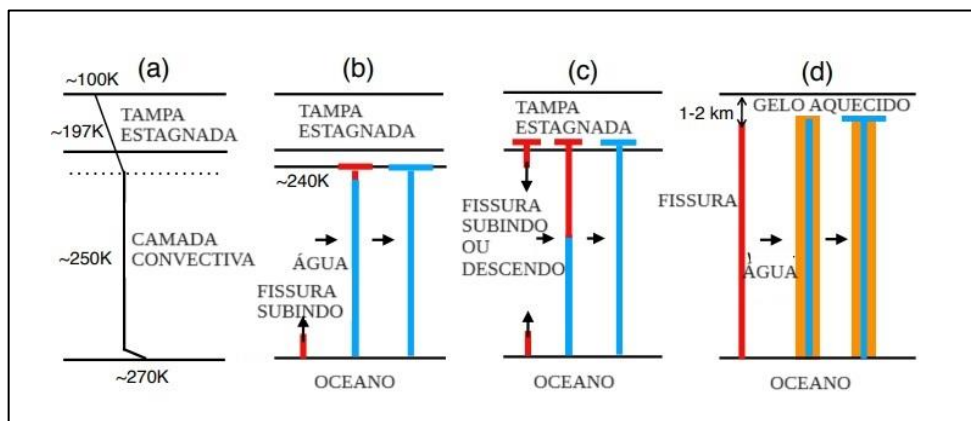
O caráter cicloide dessa sequência de fissuras ocorre porque a direção da força de maré é outra nesse novo “pulso” gravitacional, de acordo com o movimento orbital do conjunto ressonante. Como exemplo dessa influência da órbita, há formações cicloidais cujos arcos se abrem para o norte ao se propagarem no sentido oeste e outras se abrem para o sul ao se propagarem para leste no hemisfério sul de Europa; no hemisfério norte, os efeitos formativos são opostos para as cristas cicloidais (Hoppa et al., 1999, p. 1901).

Formações Lenticulae

Exemplificadas pela *Figura 11* (direita), em que uma área de 130x140Km revela várias formações elípticas ou circulares de 9Km de diâmetro, em média, côncavas (os *poços*, ou “pits”) e convexas (os *domos*, ou “domes”), de tom igual ou mais escuros (“darkspots”) que a crosta. Estes são associados a materiais misturados ao gelo a partir da subsuperfície (Greeley, 2013, p. 161).

Há diferentes modelos propostos para explicar as formações *lenticulae*. A sugestão apresentada pelo geomorfologista planetário Daigo Shoji é esclarecedora a respeito de nosso foco, o papel da gravitação para a construção do relevo. Acompanhando um esquema explicativo do autor, ele apresenta um processo em quatro etapas para o surgimento dessas formações (Shoji, 2018, p. 22).

Figura 16.



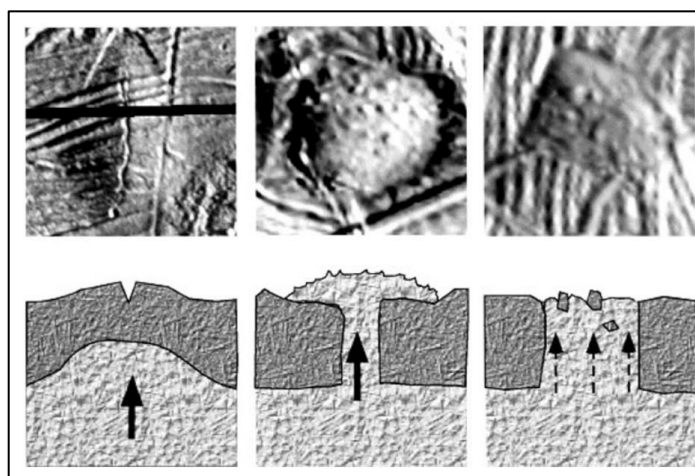
Fonte: Adaptado de Shoji (2018, p. 22).

A primeira parte da imagem (a) representa a crosta de Europa, destacando a camada de gelo que pode sofrer movimentos convectivos de derretimento e infiltração de água do oceano, superposta por uma “tampa” (*lid*) de gelo mais estável. Destacam-se ainda as diferenças estimadas de temperatura entre as camadas (em Kelvin). (b) Na base da crosta, em contato com a água salgada, a pressão causada pelas marés calculada entre 10-100 KPa e a tensão produzida pelo desequilíbrio da órbita ressonante (terceira seção), acrescentando alguns MPa, seriam suficientes para gerar uma fissura de caráter ascendente, junto a um fluxo de água salgada (Shoji, 2018, p. 11). (c) A *tampa estagnada* possuiria substâncias misturadas ao gelo, com um ponto eutético (ponto de fusão da mistura o menor possível) menor que o

ponto de fusão do gelo puro, possivelmente amônia e ácido sulfúrico, que poderiam reduzir a temperatura do gelo para 180-200K (-93,15 / -73,15 °C), quando ele se torna elástico. Com isso, a base da tampa, em contato com a água salgada e uma fissura em ascensão, passa por uma expansão volumétrica (Shoji, 2018, p. 11-12). (d) A fissura se propaga até uma profundidade de 1-2Km e é preenchida por água, que aquece o gelo (em mistura) a seu redor. Uma nova tensão é gerada pela diferença térmica e a interface direta entre o oceano e a parte mais superficial da crosta geraria as formações de origem vertical, como as *lenticulae* (Shoji, 2018, p. 12, 22).

Greeley (2013, p. 161) apresenta um esquema hipotético de como seria o resultado superficial desse fluxo vertical de energia e água em diferentes formações de caráter *lenticulae* (Figura 17). Da esquerda para a direita: uma fissura parcial e abaulamento do terreno, um transbordamento de material (criovulcanismo) e um derretimento parcial da superfície da crosta.

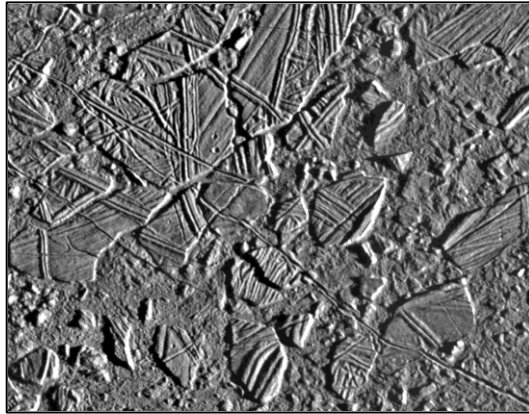
Figura 17.



Fonte: Greeley (2013, p. 161).

Terreno Caótico (“Chaos Terrain”)

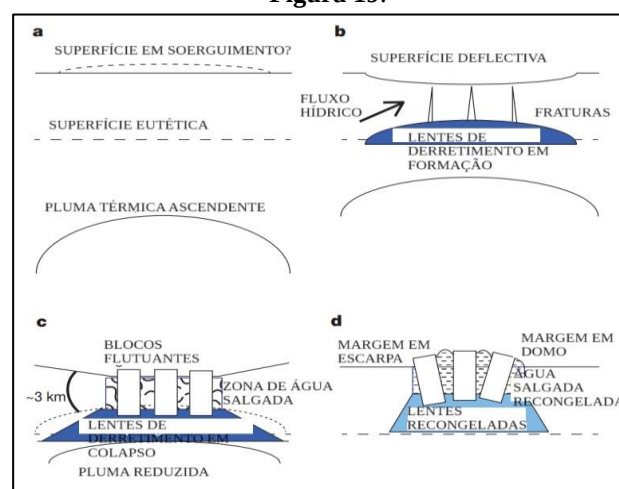
Figura 18 – Área de 34x42Km característica do que se batizou “Terreno Caótico”. Galileo (1997).



Fonte: NSSDCA/NASA – <https://nssdc.gsfc.nasa.gov>.

“Terreno caótico” é o nome dado a áreas que podem ter centenas de quilômetros quadrados, marcadas por placas de gelo fraturadas e deslocadas. Assim como as formações *lenticulae*, muitas vezes ele se associa a tons escuros provenientes dos minerais da crosta suboceânica de Europa (Greeley, 2013, p. 160). Há algumas semelhanças entre as explicações propostas pelos pesquisadores para os processos de geração das formações *lenticulae* e dos terrenos caóticos. Schmidt *et al.*, (2011, p. 504) sugerem, mais uma vez, uma geração em quatro etapas, ilustrada na *Figura 19*.

Figura 19.



Fonte: Adaptado de Schmidt (2011, p. 504).

(a) Haveria a ascensão térmica (caráter convectivo?) através do gelo mais puro da crosta até atingir a camada com mais impurezas, o que reduz o ponto de fusão do gelo (ponto eutético). (b) O derretimento provocado por essa energia térmica nesta área ocasionaria a formação de “lentes” geladas mais frágeis no interior da crosta. Água salgada subiria devido à mudança no gradiente hídrico, gerando pressão e, com ela, fraturas verticais. (c) A camada superior, mais sólida, afundaria sobre as lentes, permitindo maior fluxo ainda de água salgada e produzindo um gelo mais poroso entre os blocos mais resistentes. (d) O recongelamento das lentes e das porções de gelo, agora salgado e granulado, resultaria no relevo superficial heterogêneo e acidentado do terreno caótico. (Schmidt, 2011, p. 502,504).

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não podemos negar que a complexidade crescente do conhecimento científico e sua ligação cada vez mais intrínseca com a Matemática revelam aspectos do mundo natural que parecem se diferenciar cada vez mais das descrições que conseguimos apenas por nossos sentidos e senso comum. Essa característica é utilizada como “pretexto” por terraplanistas para colocar em dúvida a validade do conhecimento científico. Em muitos casos, o discurso científico parece muito mais confundir e deixar dúvidas sobre suas próprias afirmações – mais ainda pela crescente necessidade de mostrar seus aspectos subjetivos e pouco exatos, despiando-se das crenças objetivistas da era clássica positivista no século XIX. Por outro lado, a epistemologia do “empirismo pessoal limitante” (Marineli, 2020, p.1177), caro a negacionistas na era da “pós-verdade”, pouco oferece uma alternativa coerente e socialmente produtiva para conhecermos melhor o mundo natural. Uma maior autorreflexão sobre as interações das Ciências Naturais e a Matemática pode auxiliar os próprios pesquisadores explicarem, ensinarem e divulgarem com mais clareza seus caminhos epistemológicos, seja para seus pares ou para o público mais geral.

Ao longo deste artigo, tentamos demonstrar através do estudo sobre uma problemática concreta e específica algumas dessas possíveis interações, por exemplo, qual seria o papel da gravitação na formação do relevo superficial de Europa. O espectro muito amplo das Ciências Naturais levou-nos a focalizar a discussão em apenas uma delas, a Geomorfologia Planetária.

Desde o início tivemos clareza de que em pesquisas de epistemologia científica é necessário nos mantermos alertas a eventuais generalizações inadequadas. Provavelmente os

usos e diálogos de nossa disciplina com a Matemática não são os mesmos que os surgidos com outros campos de trabalho do cientista da natureza – que pode transitar da botânica à oceanografia, da química molecular à meteorologia. As limitações de nosso estudo são conscientemente estreitas, mas necessárias a uma opção de debate sustentada na operacionalização do trabalho do pesquisador e não apenas na argumentação conceitual.

Por outro lado, as três relações tratadas entre Matemática e Geomorfologia Planetária, podem servir como inspiração e foco reflexivo para cientistas que se dediquem a outros campos disciplinares. Não com a intenção de buscar o mesmo caminho de diálogo elaborado por nós, de modo forçado e alheio as suas próprias lógicas disciplinares, mas sim de se verem incentivados a observar melhor seus próprios trajetos epistemológicos junto à Matemática. É um trabalho de autorreflexão construído com a certeza de trazer grande enriquecimento a nosso trabalho de descoberta, ensino e divulgação do conhecimento sobre a natureza.

REFERÊNCIAS

ABREU, M. **Determinação e análise das principais componentes de maré terrestre e carga oceânica por meio de dados de posição e do campo de gravidade terrestre**. Brasília: UNB, 2019 (Tese – Doutorado em Geofísica Aplicada).

ASKENAZY, Y. The surface temperature of Europa. **ArXiv**. 1608.07372v6 [astro-ph.EP], 2018, p. 01-44. Disponível em: arxiv.org/abs/1608.07372. Acesso em: 06 jul. 2024.

ASKENAZY, Y.; TZIPERMAN, E. Dynamic Europa ocean transient Taylor columns and convection driven by ice melting and salinity. **Nature Communications**, 12 (6376), 2021, p. 01-12.

ARANA, D. **A maré terrestre: aspectos teóricos e práticos**. Presidente Prudente: UNESP, 2020. (Tese – Doutorado em Ciências Cartográficas).

BARCELOS NETO, J. **Matemática para físicos com aplicações: vetores, tensores e spinors**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BASSALO, J.; CARUSO, F.; MARQUES, A. **Introdução às bases filosóficas da Física**. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

CALLEGARI JR, N. Ressonâncias e marés de satélites naturais. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**. 3, 2006, p. 39-57. Disponível em: <https://www.relea.ufscar.br/index.php/relea/article/view/75/65>. Acesso em: 09 mai. 2023.

CARNAHAN, E. et. al. New insights into temperature-dependent ice properties and their effect on ice shell convection for icy ocean worlds. **ArXiv**. 2011.12502v1 [astro-ph.EP], 2011, p. 01-51. Disponível em: arxiv.org/abs/2011.12502. Acesso em: 08 jun. 2023.

CULBERG, R. et. al. Double ridge formation over shallow water sills on Jupiter's moon Europa. **Nature Communications**. 13(2007), 2022, p. 01-10.

DAUBAR, I; HAYES, A. Planned Geological Investigations of the Europa Clipper Mission. **Space Science Reviews**, 220(18), 2024, p.1-55. Disponível em: <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/153544>. Acesso em 10 jul. 2024.

FABRIS, J. et. al. **Gravitação**. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

FERREIRA, C.; NARDI, L.; SILVA, C. “A ciência apenas joga matemática em você”: a influência da matemática na crise de confiança na ciência. p.159-181. In: GURGEL, I. (org.). **Por que confiar nas ciências?:** epistemologias para o nosso tempo. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

FIGUEIREDO, D. Luas geladas do sistema solar. p. 237-278. In: Galante, D. et. al. **Astrobiologia: uma ciência emergente**. São Paulo: Livraria da Física, 2019.

GIACOMETTI, J. **Mecânica clássica: uma abordagem para licenciatura**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

GOLDREICH, P.; MITCHELL, J. Elastic ice shells of synchronous moons: implications for cracks on Europa and non-synchronous rotation of Titan. **Icarus**, 209 (2), 2010, p. 631-638. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0019103510001612?via%3Dihub>. Acesso em: 12 ago. 2022.

GREELEY, R. **Introduction to Planetary Geomorphology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

GURGEL, I. (org.). **Por que confiar nas ciências?:** epistemologias para o nosso tempo. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

HALLIDAY, D. **Fundamentos da física (vol.1)**. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HAY, H.; HEWITT, I. Tidal forcing in icy-satellite oceans drives mean circulation and ice-shell torques. **Journal of geophysical Research: Planets**, 129, 2024, p.01-30. Disponível em: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2024JE008408> Acesso em: 19 jun. 2024.

HOPPA, G. et. al. Formation of cycloidal features on Europa. **Science**, 285, 1999, p.1899-1902. Disponível em: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/10489365>. Acesso em: 2 fev. 2022.

JÁCOME, H.; ECHER, E.; MARQUES, M. Uma introdução à interação eletrodinâmica entre Júpiter e os satélites Galileanos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 45, 2023, p.01-12.

JANSEN, M. et. al. Energetic constraints on ocean circulation on icy ocean worlds. **ArXiv**. 2206.0073v2 [astro-ph.EP], 2023, p. 01-22 Recuperado de <https://arxiv.org/abs/2206.00732>.

KANG, W. Different ice shell geometries on Europa and Enceladus due to their different sizes: impacts of ocean heat transport. **ArXiv**. 2206.153252 [astro-ph.EP], 2022, p. 01-26 Disponível em: arxiv.org/abs/2206.15325. Acesso em: 14 jul.2023.

KIMURA, J. Europa's structural conditions for the existence of subsurface ocean and the absence of metallic core-driven magnetic field. **ArXiv**. 2403.01336v1 [astro-ph.EP], 2024, p. 01-47. Disponível em: arxiv.org/abs/2403.01336v1. Acesso em: 9 jan. 2024

LEAL, V. **A natureza humana da matemática**. Curitiba: Appris, 2021.

LEE, S. et. al. Mechanics of tidally driven fractures in Europa's ice shell. **Icarus**, 177, 2005, p. 367-379. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0019103505002460?via%3Dihub>. Acesso em: 21 jul. 2023.

MACEDO, H. **Análise das marés oceânicas empregando o método de Levenberg Marquardt**. Rio de Janeiro: Observatório Nacional, 2013. (Dissertação – Mestrado em Geofísica).

MARINELI, F. O terraplanismo e o apelo à experiência pessoal como critério epistemológico. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**. 37(3), 2020, p. 1173-1192. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/74933>. Acesso em: 12 ago. 2023.

MONTEIRO, F. A genealogia de uma historiografia genealógica: a escrita da história anarquista pós-estruturalista. **Faces da História**. 1(2), 2014, p. 6-31.

MONTEIRO, F. **Diálogos entre a Física e a História: construção de um caminho interdisciplinar para pesquisa e ensino**. Curitiba: Appris, 2022.

OLIVEIRA FILHO, K; SARAIVA, M. **Astronomia e astrofísica**. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

OLIVEIRA, L. et.al. Perturbações gravitacionais e atividade tectônica em Europa. **9th International Congress of Brazilian Geophysical Society**, 2005, p. 11-14. Disponível em: <https://sbgf.org.br/mysbgf/eventos>. Acesso em 4 jan. 2023.

PAITA, F.; et. al. Element history of the Laplace resonance: a dynamical approach. **Astronomy and Astrophysics**, 617 (35), 2018, p. 01-18.

PIRES, A. **Evolução das ideias da Física**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

PROCKTER, L et. al. Strike-slip duplexing on Jupiter's icy moon Europa. **Journal of Geophysical Research**, 105 (4), 2000, p. 9483-9488. Disponível em: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/1999JE001226> Acesso em: 11 set. 2022.

RABINOVICH, B. Gravitational and Hydroelastic Waves in Thomson–Delaney Cells of the Ocean on Jovian Moon Europa. **Cosmic Research**, 49(1), 2011, p. 82-92. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1134/S0010952510061024>. Acesso em: 18 mai. 2022.

ROSS, J et. al. Relevo, paisagem e tecnologia da informação. p. 175-220. In: GUERRA, A; LOUREIRO, H. (orgs.). **Paisagens da geomorfologia**: temas e conceitos no século XXI. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2022.

SCHMIDT, B. et. al. Active formation of ‘chaos terrain’ over shallow subsurface water on Europa. **Nature**. 479,2011, p. 502-505.

SHOJI, D. Condition for the deflection of vertical cracks at dissimilar ice interfaces on Europa. **ArXiv**. 1810.05990v1 [astro-ph.EP], 2018, p. 01-25. Disponível em: arxiv.org/abs/1810.05990. Acesso em 29 ago. 2023.

SILVA, R. et. al. **Um estudo da libração laplaciana**. São Paulo: Editora UNESP, 2012.

VITA-FINZI, C.; FORTES, A. **Planetary geology**: an introduction. Edinburgh/London: Dunedin, 2013.

WALLACE, W. **Natureza e modelo**: uma síntese de filosofia da ciência e filosofia da natureza. São Paulo: Vide Editorial, 2023.

HISTÓRICO

Submetido: 08 de Novembro de 2024.

Aprovado: 21 de Outubro de 2025.

Publicado: 30 de Novembro de 2024.